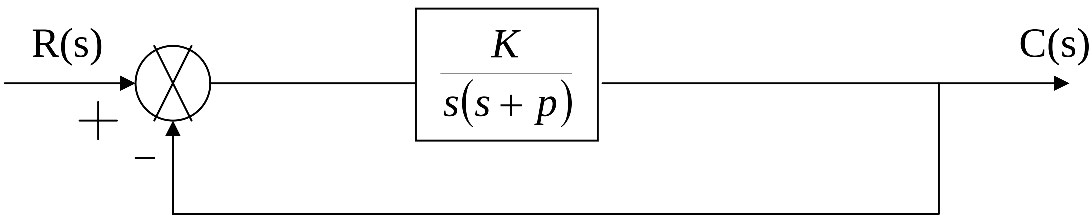
SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN - TIPO 1



Función de Transferencia a Lazo Cerrado (FTLC): $\frac{C(s)}{R(s)}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+p)+K} = \frac{K}{s^2+ps+K} = \frac{1}{(s+s_1)(s+s_2)}$$

Para el estudio de un sistema de segundo orden se analiza la FTLC general de la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\omega^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega^2{}_n}$$

donde: ω_n es la frecuencia natural

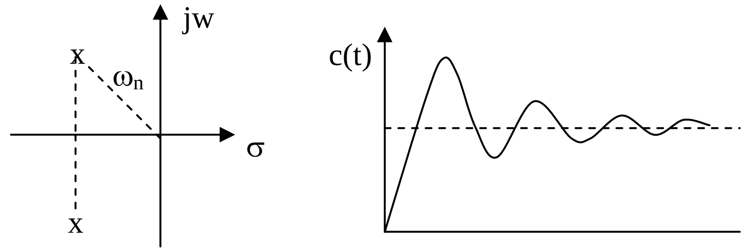
ξ es el coeficiente de amortiguación

Para K=1

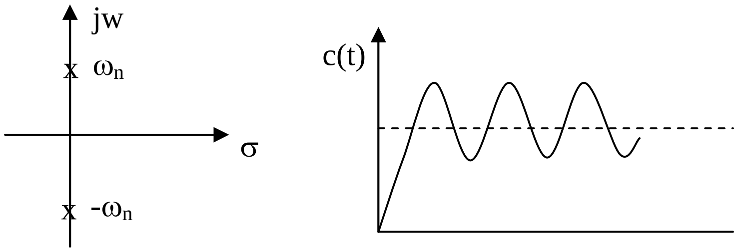
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

La factorización del denominador de esta función dará los dos polos del sistema: $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$

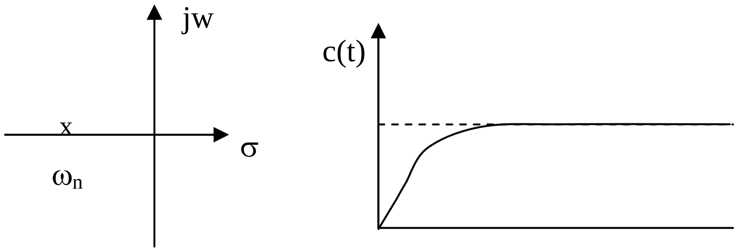
COMPORTAMIENTO DE LOS SISTEMAS DE 2DO ORDEN DEPENDIENDO DE ξ



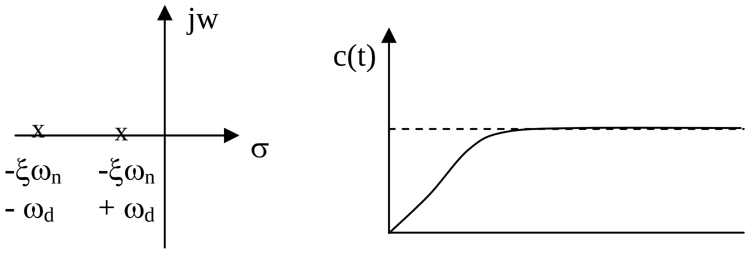
$0 < \xi < 1$
Sistema Subamortiguado
Polos complejos conjugados.
$S1,2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$



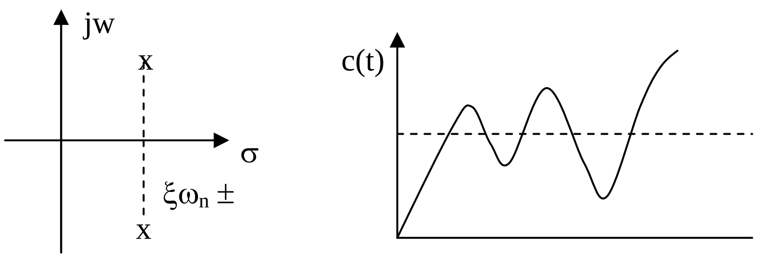
$\xi = 0$
Sistema en el punto de estabilidad crítica
Polos imaginarios
$S1,2 = \pm j\omega_n$



$\xi = 1$
Sistema críticamente amortiguado
Polos reales e iguales
$S1,2 = -\omega_n$



$\xi > 1$
Sistema sobreamortiguado
Polos reales y diferentes
$S1,2 = -\xi\omega_n \pm \omega_d$



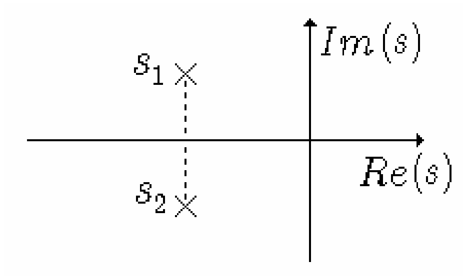
$\xi < 0$
Sistema inestable
Polos en el semiplano derecho
$S1,2 = \xi\omega_n \pm \omega_d$

SISTEMA DE SEGUNDO SUBAMORTIGUADO: 0 < ξ < 1

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Polos complejos conjugados:

$$s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_d \qquad \text{con} \quad \omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\ .$$
$$s_2 = -\xi\omega_n - j\omega_d$$



RESPUESTA AL ESCALÓN: $R(s) = \dfrac{A}{s}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n - j\omega_d)(s + \xi\omega_n + j\omega_d)}$$

Sustituyendo y aplicando fracciones parciales:

$$C(s) = \frac{A\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega^2{}_n)} = \frac{A\omega_n^2}{s(s + \xi\omega_n - j\omega_d)(s + \xi\omega_n + j\omega_d)}$$

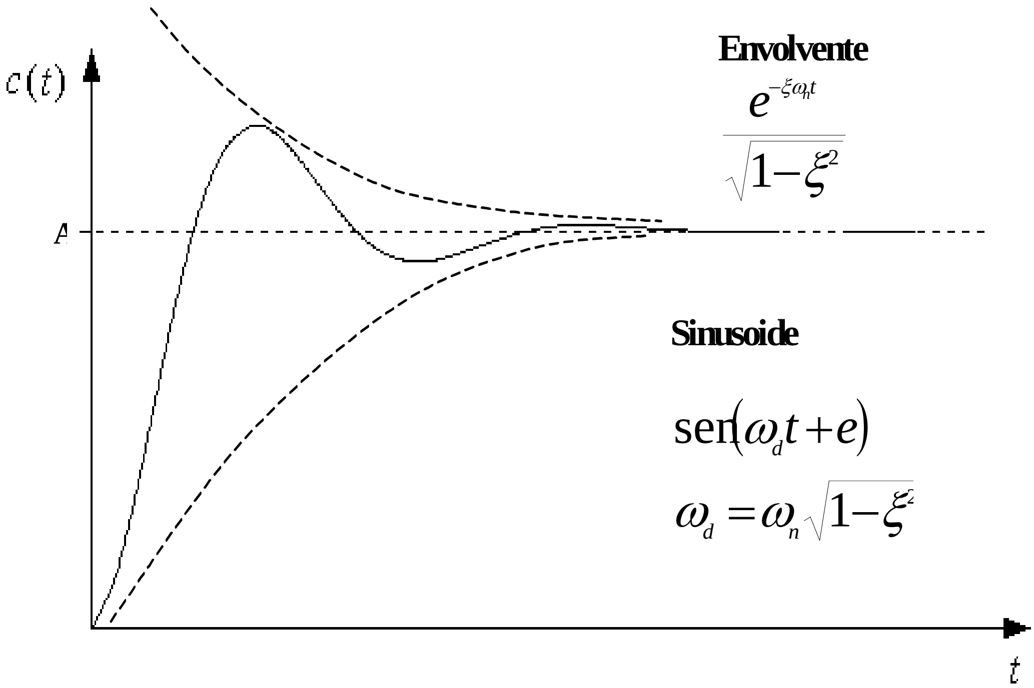
$$C(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{\left(s + \xi\omega_n - j\omega_d\right)} + \frac{A_3}{\left(s + 2\omega_n + j\omega_d\right)}$$

Antitransformando

$$c(t) = A_1 + A_2 e^{(-\xi\omega_n + \omega_d j)t} + A_3 e^{(-\xi\omega_n - \omega_d j)t}$$

$$c(t) = A - \left(\frac{A}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) e^{-\xi\omega_n t}\, sen\left(\omega_d t + \theta\right) \quad t \geq 0$$

donde: $\theta = arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$

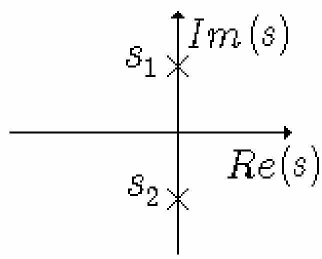


SISTEMA DE SEGUNDO CRÍTICAMENTE ESTABLE: ξ = 0

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2}$$

polos imaginarios puros:

$$s_1 = j\omega_n, \quad s_2 = -j\omega_n$$



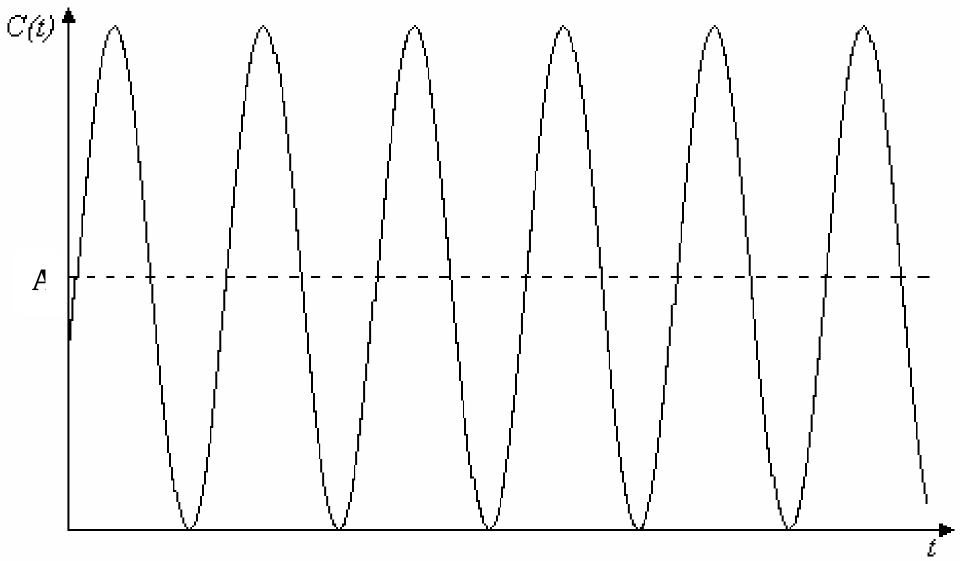
RESPUESTA AL ESCALON: $R(s) = \frac{A}{s}$

Sustituyendo y aplicando fracciones parciales:

$$C(s)=\frac{A\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}$$
$$=\frac{A}{s}-\frac{As}{s^2+\omega_n^2}$$

Antitransformando:

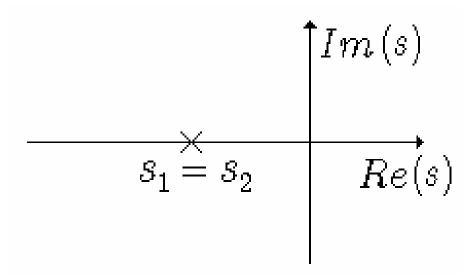
$$c(t)=A[1-cos(\omega_n)t]$$


C(t)
A
t

SISTEMA DE SEGUNDO CRITICAMENTE AMORTIGUADO: ξ = 1

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

polos reales iguales: $s_1 = s_2 = -\omega_n$



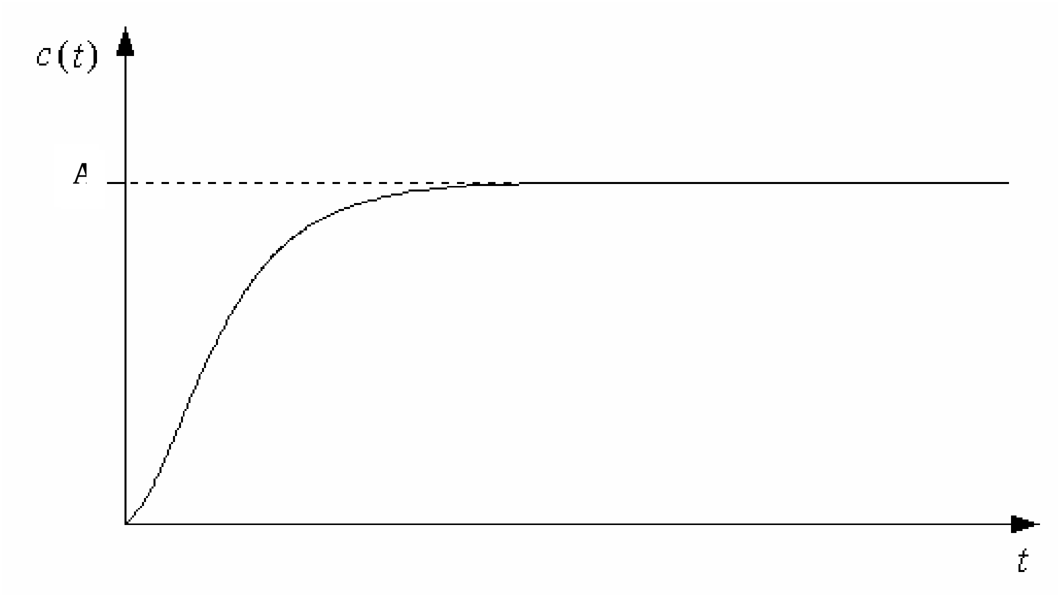
RESPUESTA AL ESCALÓN: $R(s) = \dfrac{A}{s}$

Sustituyendo y aplicando fracciones parciales:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{A\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} \\ &= \frac{A}{s} - \frac{A\omega_n}{(s+\omega_n)^2} - \frac{A}{s+\omega_n} \end{aligned}$$

Antitransformando:

$$\begin{aligned} c(t) &= \left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right)A \\ &= \left[1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\right]A \end{aligned}$$



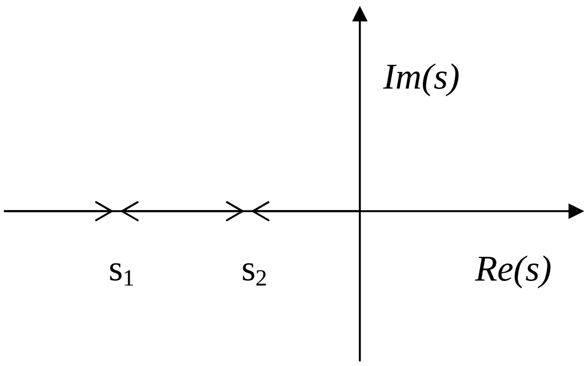
Este sistema es el que crece más rápido sin exceder el valor final. Visto de otro modo, *c(t)* es la más rápida entre las *c(t)* estrictamente crecientes.

SISTEMA SOBREAMORTIGUADO : $\xi > 1$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^{\,2}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\,2}}$$

Polos reales y distintos:

$$s_1 = -\xi\omega_n - \omega_d \,, s_2 = -\xi\omega_n + \omega_d \,, \qquad \text{con } \omega_d = \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$



RESPUESTA AL ESCALON: $R(s) = \dfrac{A}{s}$

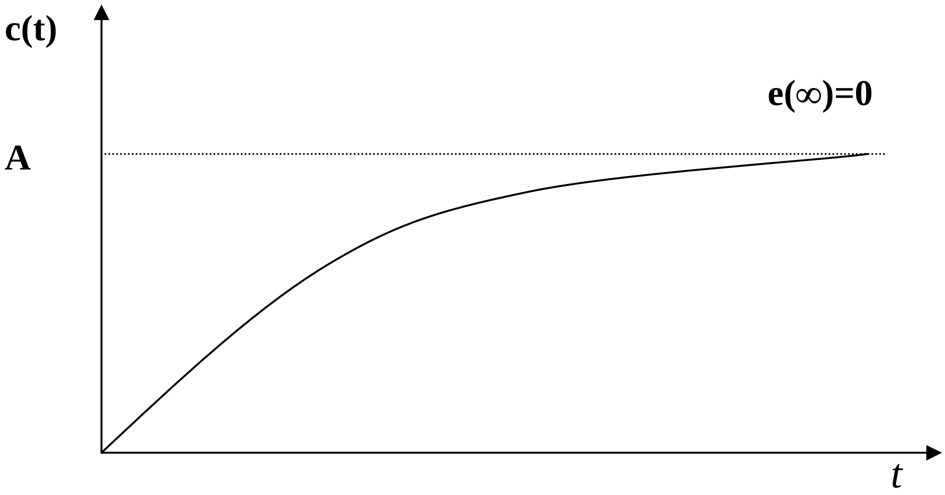
Sustituyendo y aplicando fracciones parciales:

$$C(s) = \frac{A\omega_n^{\,2}}{s\left(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega^2{}_n\right)} = \frac{A}{s} + \frac{A}{2\omega_d}\left[\frac{s_2}{s + s_1} - \frac{s_1}{s + s_2}\right] =$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{A\omega^2{}_n}{2\omega_d}\left[\frac{1}{s_1}\left(\frac{1}{s + s_1}\right) - \frac{1}{s_2}\left(\frac{1}{s + s_2}\right)\right]$$

Antitransformando:

$$c(t) = A + \frac{A\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right)$$



Si $\|s_1\| >> \|s_2\|$ podemos aproximar:

$$c(t) = \left(1 - e^{-s_2 t}\right)A = \left[1 - e^{(-\xi\omega_n + \omega_d)t}\right]A$$

Observe que la aproximación equivale a un sistema de primer orden

RESPUESTA PARA TODOS LOS VALORES DE ξ